



TSI

CONCOURS COMMUN INP RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE MATHÉMATIQUES Session 2023

1/ PRÉSENTATION DU SUJET

Ce sujet était composé de trois problèmes. Il balayait une grande partie du programme des deux années de TSI.

→ Problème 1 - Suites et calcul matriciel

Ce premier problème portait sur l'étude de suites par une méthode de calcul matriciel. Il traitait de la réduction des matrices, en particulier de la trigonalisation dans l'ensemble des matrices réelles.

Problème 2 - Une fonction définie à partir d'une intégrale

Ce problème traitait de l'étude par diverses méthodes d'une fonction définie par une intégrale. Il faisait appel aux connaissances sur l'intégrale généralisée et à diverses méthodes de calcul et d'encadrement afin de déterminer les caractéristiques principales de cette fonction.

Problème 3 - Étude d'un couple de variables aléatoires

L'objet de ce problème était l'étude d'une expérience aléatoire composée de deux étapes. Cette étude reposait sur des techniques usuelles de calcul des probabilités (probabilités conditionnelles, formule des probabilités totales, couple de variables aléatoires, etc.) et d'un point de vue calculatoire, sur l'utilisation de séries entières.

Le sujet était composé d'une **alternance de questions de cours, calculatoires ou de réflexion**. Il était d'une longueur raisonnable malgré le nombre important de questions. Chaque partie permettait d'interroger les candidats sur des notions importantes du programme.

En Algèbre, les **calculs** (déterminant, espaces propres, inverse d'une matrice, etc.) ont été dans une large mesure, **très bien menés**.

En Analyse, les intégrales généralisées ont posé problème à une partie des candidats, les calculs ont globalement été bien menés et les inégalités correctement manipulées.

La partie Probabilité est celle qui a posé le plus de problèmes, avec une séparation nette entre des candidats montrant une bonne maîtrise du sujet et d'autres ne connaissant pas les points élémentaires du cours. Cette partie a donc été moins réussie. Pourtant, une connaissance des éléments de base du cours (loi géométrique, formule des probabilités totales, définition de l'espérance) permettait de faire une bonne partie du problème.

Le sujet comportait de manière générale de nombreuses questions de cours ou d'application directe de celui-ci. Les copies des candidats montrant une connaissance correcte du cours ont donc été valorisées. Les correcteurs tiennent à souligner, même s'il s'agit peut-être d'une évidence, que cette connaissance est la condition indispensable à la réussite des étudiants pour l'épreuve de mathématiques. Les pratiques calculatoires sont bien sûr importantes, mais leur utilisation est souvent vaine s'il elle n'est pas adossée à une maîtrise des concepts de base.

Sur un autre plan, les correcteurs tiennent à souligner que les candidats doivent bien lire l'énoncé afin d'en comprendre les objectifs et d'en suivre le fil directeur. Ceci évite de refaire plusieurs fois la même démonstration ou d'utiliser une méthode fastidieuse alors que des raccourcis peuvent économiser des pages de calcul.

Enfin, même si le sujet ne comportait qu'une seule question de programmation, les correcteurs ont noté des efforts notables dans ce domaine.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

En Algèbre, les correcteurs ont constaté de fréquentes confusions entre diagonalisabilité, trigonalisabilité, symétrie, inversibilité ; ces propriétés ne sont pas interchangeables !

En Analyse, le cours n'est pas assez su par les candidats. De nombreuses questions de cours ont été mal, voire pas traitées (intégrales généralisées, développements en série entière usuels, etc.).

En Probabilités, les lois usuelles sont à apprendre et à utiliser correctement. Chaque loi est caractérisée par des situations (répétition finie/infinie d'une expérience de type Bernoulli, indépendance, etc.) qui permettent de l'identifier sans équivoque, et qui doivent être citées par les candidats.

Les erreurs spécifiques dans certains domaines du programme seront traitées en détail par la suite. Nous soulignons dans ce qui suit, les points généraux qui doivent globalement être améliorés :

- La présentation et la lisibilité sont satisfaisantes sur la plupart des copies. Les correcteurs tiennent à le souligner et à féliciter les candidats qui ont fait des efforts certains sur cet aspect. Une minorité d'irréductibles candidats continue cependant à adopter une présentation plus proche du brouillon que d'une copie de concours, à ne pas mettre en valeur leurs résultats, à ne pas traiter les questions dans l'ordre (ou à signaler des renvois clairs). De telles copies sont nécessairement jugées sévèrement.
- Une attention importante doit également être portée à l'orthographe, à la grammaire, à la conjugaison.
- La question de la rédaction est plus délicate et de nombreuses copies sont défailtantes sur ce point.
- Une réponse doit bien sûr être justifiée ; une réponse affirmative ou négative sans démonstration n'est pas recevable. Les correcteurs souhaitent également attirer fortement l'attention des candidats sur le fait qu'une réponse ne peut pas être uniquement un enchaînement de calculs, comme on le voit trop souvent. Ces calculs doivent être introduits par une phrase, même courte. Les variables doivent être déclarées, les enchaînements logiques soulignés par des mots de liaison, les questions dont on utilise un résultat, signalées explicitement. L'objectif est bien sûr de rendre la copie agréable à lire pour le correcteur, mais plus fondamentalement, de structurer le raisonnement des étudiants.

La qualité de cette rédaction marque souvent la différence entre une copie correcte et une très bonne copie.

Enfin, nous terminons sur un point plus marginal mais qui peut agacer énormément le correcteur. Afin que les candidats ne soient pas bloqués lorsqu'ils ne réussissent pas une question, de nombreux résultats intermédiaires sont fournis par l'énoncé. Certains candidats en profitent pour se contenter de réécrire la formule à démontrer affublée d'un vague argument, ou bien pour trafiquer leurs calculs afin d'arriver au résultat annoncé. Ces cas, minoritaires, sont appréciés et traités à leur juste valeur par les correcteurs.

3/ RAPPORT DÉTAILLÉ

PROBLÈME 1 / Partie I - Éléments propres d'une matrice

Q1. Cette question a été globalement bien réussie.

Q2. Cette question comportait une imprécision ; l'énoncé aurait dû mentionner : « trigonalisable dans l'ensemble des matrices à coefficients réels ». Le cas échéant, le problème posé par cette imprécision a été jugé en faveur du candidat.

Ceci étant dit, on constate de nombreuses confusions sur cette question (en particulier, c'est le polynôme caractéristique qui est scindé, pas la matrice !).

Q3. Certaines copies présentent ici des problèmes de raisonnement : il n'y a pas de lien direct entre diagonalisabilité et inversibilité. Par ailleurs, trop peu de candidats pensent à utiliser le fait que 0 n'est pas valeur propre et repartent dans des calculs.

Q4. Les calculs d'espaces propres sont généralement menés à bien et de façon efficace. Le point du cours permettant de montrer la diagonalisabilité est la plupart du temps connu.

PROBLÈME 1 / Partie II - Trigonalisation de A

Q5. Une famille libre de 3 vecteurs de \mathbb{R}^3 est automatiquement une base. Il est inutile de vérifier la liberté et le caractère générateur de la famille. Certains candidats semblent de plus penser qu'une famille de trois éléments dans \mathbb{R}^3 est automatiquement génératrice.

Q6. Ce point est au centre du cours sur la représentation matricielle des endomorphismes et se révélait assez déterminant. Une partie importante des étudiants a correctement traité cette question. Lorsque ce n'était pas le cas, cela révélait souvent un manque de compréhension du problème dans sa globalité.

Q7. Cette question a été traitée correctement dans un grand nombre de copies. Cependant, plutôt que de calculer l'inverse de P avec la méthode de Gauss, il était considérablement plus rapide d'effectuer le produit de P et de la matrice proposée.

Q8. La formule de changement de base est la plupart du temps connue des candidats.

PROBLÈME 1 / Partie III - Calcul des puissances de T

Q9. Cette question est, la plupart du temps, traitée correctement. Attention cependant : la commutativité concerne le produit matriciel et pas la somme.

Q10. Après le calcul de N^2 , une justification était attendue pour les puissances supérieures.

Q11. Il faut citer explicitement la formule du binôme de Newton. Par ailleurs, celle-ci exige la commutativité des matrices en jeu. Enfin, cette question demande une expression explicite de la puissance n -ième de N , pas seulement une formule contenant D et N .

Q12. Cette question a été, la plupart du temps, bien traitée. Une justification explicite par un calcul était attendue.

Q13. Cette question a été, la plupart du temps, bien traitée. Il fallait invoquer les suites géométriques ou une récurrence immédiate afin de convaincre les correcteurs.

Q14. La récurrence est effectuée correctement, la plupart du temps.

Q15. Cette question a été régulièrement bien traitée par les candidats ayant réussi les questions précédentes.

4/ CONCLUSION

Les points qui ressortent de ce rapport sont classiques mais méritent d'être répétés.

Au-delà du **calcul**, la **maîtrise du cours** et la **précision dans son application** sont indispensables à la réussite de cette épreuve de mathématiques. La **clarté** et la **cohérence** de la copie sont des éléments importants d'appréciation.

Comme c'est l'usage, les remarques faites dans ce rapport insistent, la plupart du temps, sur les lacunes des candidats. Les correcteurs tiennent néanmoins à souligner avoir constaté, dans un nombre important de copies, une **connaissance satisfaisante du cours** et une **bonne qualité des raisonnements**. De très bonnes copies ont de plus révélé des techniques de démonstration maîtrisées et une réelle efficacité dans la rédaction. Nous invitons tous les futurs candidats à poursuivre leur travail afin d'atteindre ces objectifs.